# 中学生の関数概念に関する認識
## —中学校第 1 学年を対象とした認識調査より—

谷　陽良
京都教育大学大学院　数学教育専修

# Comprehension of Function Concept of Junior High School Students
## －Academic Ability Survey for the First Grade of Junior High School－

Akira TANI

2017 年 11 月 30 日受理

**抄録**：我が国の中学生の関数の理解については，近年の全国学力・学習状況調査より他領域に比べて課題があることが明らかとなっている。本研究では，中等教育段階の関数教育において基盤となる関数の定義の理解を促進するため，現行のカリキュラムを踏まえ指導法の改善を図る。指導法を考案するためには，小学校から関数の指導を受けている生徒が，関数の意味についてどの程度の理解を示すかを明確にする必要がある。そこで，本稿では中学校第 1 学年の生徒を対象に関数の意味に関する認識調査を実施し，現状の生徒の理解状況を明らかにした。

**キーワード**：関数認識，関数の定義理解，中学校の関数教育

## Ⅰ．問題の所在

経済協力開発機構（OECD）による PISA2012 の数学的リテラシーに関する問題の平均得点順位では，日本（536 点）は 7 番目に位置している（OECD 平均 494 点）。数学的な内容別「変化と関係」に着目して，習熟度レベル別[注 1)]でレベル 5 以上（607 点以上）の生徒の割合が多い順に各国を比較すると，日本は平均得点と同様に 7 番目（542 点）である（OECD 平均 493 点）。したがって，PISA のような国際調査で各国と比較すると，日本の関数領域の課題は顕著に現れないことが分かる[5)]。

しかし，近年の国内調査では中学校学習指導要領解説における 4 つの領域（「数と式」「図形」「資料の活用」「関数」）のうち，「関数」領域に課題がみられる。主に義務教育段階の児童・生徒の学力を図る「全国学力・学習状況調査」と称される国内調査が，日本では毎年実施されている。その調査結果を平成 26 年度から 3 ヵ年分析すると，数学 A（基礎的・基本的な知識・技能が身に付いているかどうかをみる問題）では，関数領域は他領域に比べて最も平均正答率が低い。この結果より，筆者は関数関係の本質的な概念が形成される中学校初期段階の関数教育を見直して教材を開発する必要があると考える。

本稿では，まず日本の現行の学習指導要領や教科書を分析するとともに，関数の定義に関する指導の特徴を明らかにする。また，日本の中学生を対象に実施した関数の意味に関する認識調査を通じて，生徒の理解状況を解明する。そして，それらの結果を踏まえ，新たに考案した教材で教育実践を実施することを目指して，関数の定義を指導する際の要点を整理したい。

## Ⅱ．日本の関数教育

関数の定義指導を分析するにあたり，まずは定義指導の歴史的な変遷に言及し，定義内の重点項目の変容について明らかにする。次に現行の小学校及び中学校学習指導要領解説数学編より系統的な関数教育の概観を明らかにする。そして最後に教科書内を分析し，定義指導の手順・特徴を解明する。

## 1. 関数の定義の歴史的な変遷

1951年の生活単元学習の時代には軽視されていた関数は，1958年の系統学習の学習指導要領になって，ともなって変わる量の関数として指導され始めた[13)]。1966年度版の教科書では「二つの変数 $x$，$y$ があって，$x$ の値がきまると，それに対応して $y$ の値もきまるとき，$y$ は $x$ の関数（函数）であるという。」と関数を定義している。この表記に関しては平成26年度用教科書の表記に似ている部分がある。1969年の数学教育現代化時代の学習指導要領時代では中学校第1学年で，集合の要素間の対応として関数（1対1，多対1）が定義されている。事実，1975年度版の教科書では「二つの集合 $X$，$Y$ があって，$X$ のどの要素 $x$ に対しても，$Y$ の要素 $y$ がただ1つだけ対応するとき，その対応を $X$ から $Y$ への関数という。また，このとき，『$y$ は $x$ の関数である』ともいう。」と定義されている。1977年の基礎・基本の学習指導要領のもと作成された1984年度版の教科書では，第1学年だけでなく第3学年でも関数の定義が示されている。これまで第1学年で扱われていた集合の要素間の対応としての関数の定義は第3学年での扱いになっている。第1学年における関数の定義は「変数 $x$，$y$ があって，$x$ の値を決めると，それに対応して $y$ の値がただ1つ決まるとき，$y$ は $x$ の関数であるという。」であり，第3学年では「ともなって変わる2つの変数 $x$，$y$ の変域をそれぞれ $X$，$Y$ とする。このとき，どの $x$ の値にも，$y$ の値がそれぞれただ1つ対応するならば，その対応を $X$ から $Y$ への関数という。」となっている。この頃より関数の定義において集合は前面に出さず，「対応」によって定義している。そしてその後，現代化の反省は続き，1989年を境に集合の要素間の対応としての関数の定義は後退し，現行教科書のような関数の定義指導に至っている[4)]。

実際に，各社で平成26年度用の中学校の教科書分析を行うと7社中6社が関数を定義する際「対応」という用語を用いており，全社「集合」を含む記述はない[2),3),6〜10)]。このことより現状日本では，関数の定義をする際は「対応」という用語に重点を置いて指導されていることが分かる。

## 2. 現行の学習指導要領における系統的な関数教育

現行の小学校及び中学校学習指導要領解説（2008）[11),12)] では，小学校第 1〜3 学年の低学年段階ではものとものとを対応づけたり，1つの数をほかの数の積として見たときに，乗数が1ずつ増えるときの積の増加の様子に着目する指導がなされている。小学校第4学年では，身の回りの事象からともなって変わる2つの数量の関係を見出し，数量の間の関係を言葉だけでなく，□，△などを用いた式で表したり，表や折れ線グラフで表したり，特徴を読み取ったりする指導がなされている。小学校第5学年ではともなって変わる2つの数量の関係として，簡単な場合についての比例の関係を表を用いて考察する。また，簡単な式で表されている数量の関係についても指導がなされる。そして，小学校第6学年ではともなって変わる2つの数量の関係として，比例の関係について文字aや $x$ などを用いた式や，表，グラフで変化や対応の特徴を調べたり，比例の関係を用いて問題を解決したり，反比例の関係についても指導がされる。これらの学習の上に立って，中学校第1学年では具体的な事象の中からともなって変わる2つの数量を取り出して，数量間の変化や対応の仕方に着目し，表や式，グラフを用いながら関数関係の意味を理解できるようにしている。中学校第2学年では，比例の学習を発展させ，第1学年と同様に具体的な事象における2つの数量の変化や対応を調べることで一次関数について考察する。また変化の割合に着目するなど，文字を用いた式によって関数をより深く学習する。中学校第 3 学年では関数 $y=ax^2$ を取り扱うにあたり，表，式，グラフを相互に関連させ，変化の割合やグラフの特徴など関数の理解を一層深める。また日常生活や社会の題材を取り扱い，既習の関数ではとらえられない関数関係の存在に気付かせることで，関数の学習内容をより豊かにし，今後の学習の素地となるようにしている（表1）。

## 3. 教科書内での関数の定義指導の位置づけ

図1のように教科書（啓林館『未来へひろがる 数学1』平成26年度用）[3)] では，窓のあいた部分の面積（①現象）が窓を動かした長さにともなって変わる事例が紹介されており，「長さを決めると，面積がただ 1 つに決まる」と明記されている（②変量の抽出）。そして，窓を動かした長さを $x$ cm，空いた部分の面積を $y$ ㎠として，$x$ と $y$ がともなって変わる（③関数の抽出）ことから，関数の定義がなされている（④関数の定義）。啓林館における関数の定義は「ともなって変わる2つの変数 $x$，$y$ があって，$x$ の値を決めると，それに対応して $y$ の値がただ1つに決まるとき，$y$ は $x$ の関数である」となっており，変化と対応に着目されている。この後，変数に数値

表 1　小学校算数科及び中学校数学科の内容構成[注2)]

| 学年 | | 領域 | 内 容 |
|---|---|---|---|
| 小学校 | 第 1 学年 | D 数量関係 | ・ものとものとの対応　・数の大小や順序<br>・1 つの数をほかの数の和や差としてみること |
| | 第 2 学年 | | ・数の大小や順序　・1 つの数をほかの数の積としてみること<br>・乗数が 1 ずつ増えるときの積の増え方 |
| | 第 3 学年 | | ・乗数又は被乗数が 0 の場合を含めての，乗数が 1 ずつ増減したときの積の変化 |
| | 第 4 学年 | | ・2 つの数量の関係と折れ線グラフ |
| | 第 5 学年 | | ・簡単な場合についての比例の関係 |
| | 第 6 学年 | | ・比　・比例の関係を式，表，グラフを用いて調べること<br>・比例の関係を用いて，問題を解決すること　・反比例の関係 |
| 中学校 | 第 1 学年 | C 関数 | 比例，反比例<br>ア　関数関係の意味　イ　比例，反比例の意味<br>ウ　座標の意味　エ　比例，反比例の表，式，グラフ<br>オ　比例，反比例を用いること |
| | 第 2 学年 | | 一次関数<br>ア　事象と一次関数　イ　一次関数の表，式，グラフ<br>ウ　二元一次方程式と関数　エ　一次関数を用いること |
| | 第 3 学年 | | 関数 $y=ax^2$<br>ア　事象と関数 $y=ax^2$　イ　関数 $y=ax^2$ の表，式，グラフ<br>ウ　関数 $y=ax^2$ を用いること　エ　いろいろな事象と関数 |

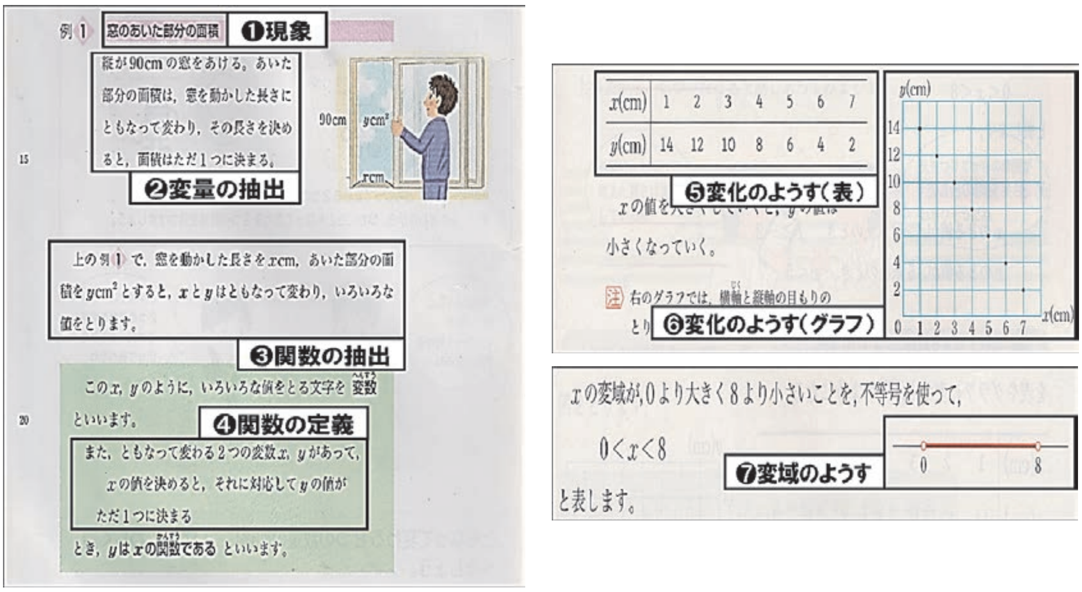


図 1　関数の定義の指導過程

（平成 26 年度用教科書 啓林館『未来へひろがる数学 1』pp.98〜99 参照）

を代入して表に整理するだけでなく（⑤変化のようす（表）），グラフに表し（⑥変化のようす（グラフ）），変域を学習した上で（⑦変域のようす），比例及び反比例の指導へと繋げていく。ゆえに関数の定義指導は（①現象）―（②変量の抽出）―（③関数の抽出）―（④関数の定義）―（⑤変化のようす（表））―（⑥変化のようす（グラフ））―（⑦変域のようす）と系統性を立てて指導されている[1)]。

また教科書内の特徴として，以下の 3 点がみられる。最初に，教科書で提示されている題材には，上記の窓の開放のような生徒が現実場面で体験する機会のある事象（以下，日常的事象と呼ぶ）や長方形や面積に関連するような事象（以下，図形的事象と呼ぶ）が取り扱われている。これは，小学校段階の学習も踏まえ生徒にとって思考しやすいような場面が設定されていると考えられる。次に，変数がいろいろな値を取った際の変化や対応のようすを表やグラフを用いて表現していることである。2 つの変数が取りうる値をグラフに表すことで，$x$ の値が変わることによって，$y$ の値がどのように移り変わるかを生徒が視覚的に確認できるようにしている。また，表にも表すことで $x$ の値が一つ決まった際に，$y$ がどのような値をただ 1 つ取りうるかを明確に理解できるようにしている。最後に，取り扱われている変化と対応の種類についてである。変化に関しては，$x$ の値を大きくしていった際に，$y$ の値が大きくなる「増加」と，$x$ の値を大きくしていった際に，$y$ の値が小さくなる「減少」の 2 種類が取り扱われている。また，対応に関しては，関数とはならない多意対応（1 対多，多対多）は取り扱われず，多対 1 を除く一意対応（1 対 1）のみが取り扱われている。

## Ⅲ．認識調査の内容

調査の概要は，以下の通りである。

調査目的：小学校段階までの関数領域の指導による関数の意味理解に関する理解状況の解明

調査期間：2017 年 7 月 11 日～19 日　各指定授業時間

調査対象：京都府下公立Ａ中学校 第 1 学年 合計 136 人

調査方法：質問紙調査（配票調査法），選択式及び自由回答式（40～45 分）

問題趣旨：本調査は 6 問から構成されており，趣旨・内容は，以下のようになっている。

1.　**変量の抽出**（問題 1）

事象から適切に量的な変化を捉えることが出来るかをみる問題である。問題 1（1）では「体重計に石をのせていく場面」，（2）では「縦 2 cm の長方形の横の長さが変わる場面」の事象が設定されており，例には「バケツに水を入れる場面」を示した。

2.　**離散量と連続量の区別**（問題 2）

事象をグラフ化した際に，離散量と連続量の意味を理解して正しい方のグラフを選択できるかをみる問題である（図 2）。問題 2（1）では「バケツに水を $x$ 分入れるときの水の重さ $y$ g」，（2）では「10 円切手を $x$ 枚買ったときの代金 $y$ 円」，（3）では「いす 60 脚を 1 列 $x$ 脚で，長方形の形にならべたときの列の数が $y$ 列」，（4）では「面積 6 ㎠の長方形で，横の長さを $x$ cm とするときの縦の長さが $y$ cm」の事象が設定されている。それぞれの問題に連続量のグラフ＜ア＞と離散量のグラフ＜イ＞を用意し，適切であると思うグラフを選択する。

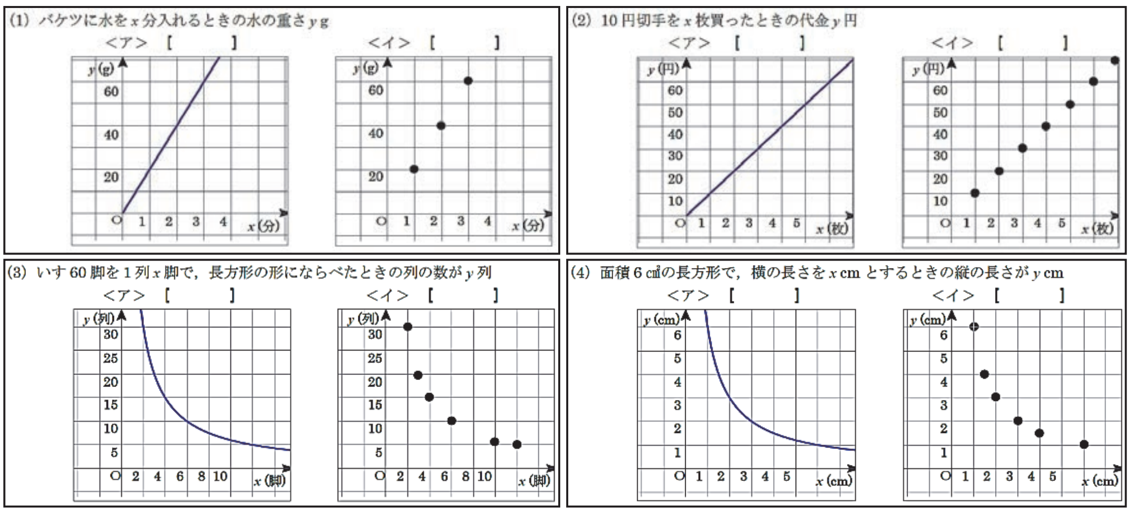


**図 2　離散量と連続量の区別**（問題 2）

3.　2 変量の抽出（問題 3）

ある事象から 2 変量を抽出し，その変量間の対応や変化のようすに気付き，表現することができるかをみる問題である（図 3)。ここでは「1000 円で 1 本 70 円の鉛筆を何本か買う場面」を提示し，購入する鉛筆の本数や合計代金，残金等を 2 変量として抽出させる。対応のようすでは，鉛筆の本数を決めた際に，支払う金額や残金を算出し，適切に対応させることが出来ているかをみる。変化のようすに関しても，本数が変化することで支払う金額や残金が増減することに気付けているかをみる。例には，｢長さ 18cm の線香を燃やす場面（1 分あたり 1 cm 燃え，1 g の灰になるとする)」を示し，解答欄には①と②を用意し，2 つ解答できるようにしている。

1000 円で 1 本 70 円の鉛筆を何本か買う場面

| | ① | ② |
|---|---|---|
| ともなって変わる 2つの数量 | | |
| 対応のようす （文章による説明） | | |
| 変化のようす （文章による説明） | | |

**図 3**　2 変量の抽出（問題 3）

4.　関数の判別（グラフ）と理由説明（問題 4）

グラフを見て，関数であるかどうかを判別できるかをみる問題である（図 4)。この問題では関数の判別に加え，その理由を記載させるが，その際，具体的な $x$ と $y$ の値の組を見つけ出し，$x$ の値が決まることにより $y$ の値がただ 1 つに決まるかどうかを判断させる。$x$ の変域は，（2），（5）が整数，（3）が 1 以上 4 以下の整数，（4）が 0 以下，（6）が−3 以上−1 以下と制限している。

5.　関数の判別（文章）と関係式表現（問題 5）

様々な事象がとり上げられている文章を読み，関数であるかどうかを判別できるかをみる問題である（図 5)。ここでは関数の判別に加え，式表現の可否についてもみる。$x$ と $y$ の関係を式に表現することが可能な場合は式を記入し，そうでない場合は「×」と解答する形式となっている。式表現で取り扱う関数は，中学校第 1 学年の生徒でも解答できるように比例・反比例までとなっている。小問（5），（6），（7）が一意対応，小問（1），（2），（3），（4），（8）が多意対応の対応関係となっている。なお小問（1）～（6）は平成 25 年度全国学力・学習状況調査の数学 A $\boxed{9}$ を参考に作成している。また，小問（7）の式表現に関しては学習進度を考慮して分析しないことにする。

6.　独立変数と従属変数の区別（問題 6）

料金と荷物の大きさの関係において，独立変数と従属変数の区別ができるかどうかをみる問題である。「$\boxed{\ 1\ }$ を決めると，それにともなって $\boxed{\ 2\ }$ がただ 1 つ決まる。」と記載された文の枠内 1，2 に適切な用語を当てはめる。なおこの問題は平成 26 年度全国学力・学習状況調査数学 A $\boxed{9}$ を参考に作成している。

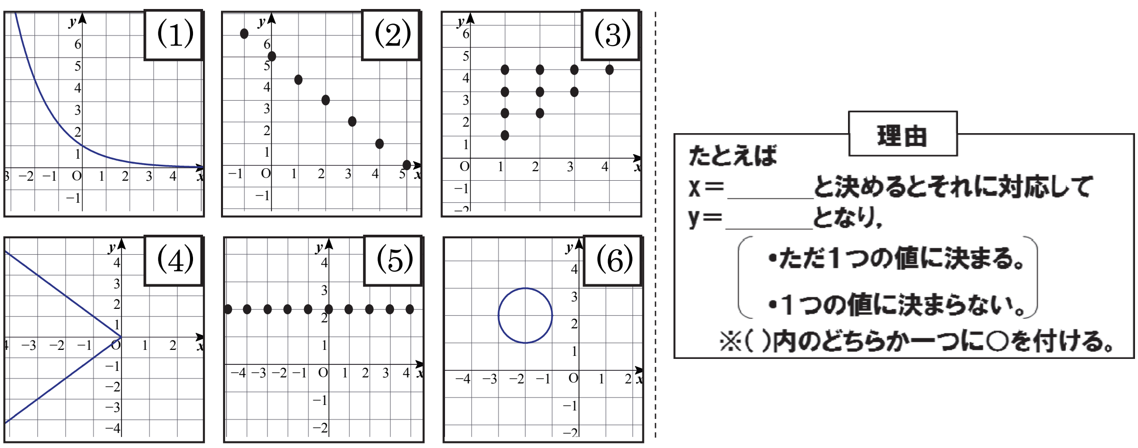


**図 4**　関数の判別（グラフ）と理由説明（問題 4）

(1) 体形(身長や体重)の違う $x$ 人の合計重量 $y$ kg
(2) 底面積が $x$ cm²の円柱の体積 $y$ cm³
(3) 体重が $x$ kgの人の身長 $y$ cm
(4) $x$ ＞ $y$ の組み合わせ
　(ただし $x$ の値は3,5,7, $y$ の値は2,4,6のうちのどれか)
(5) 整数 $x$ を2倍した数 $y$
(6) 面積が6cm²の三角形の底辺 $x$ cmと高さ $y$ cm
(7) 正 $x$ 角形の外角の和 $y$ 度
(8) 正方形の対角線の数 $x$ 本と1辺の長さ $y$ cm

**図 5**　関数の判別（文章）と関係式表現（問題 5）

## Ⅳ．認識調査の分析結果

1.　**変量の抽出**（問題 1）

問題 1 内の（1），（2）では質的な変化（形など）を記載している場合でも，同時に量的な変化（重さ，長さなど）を記載している場合は正答としている。また誤答例としては，質的な変化のみを記載している場合，読み取り不可能な記述や無回答が含まれる。図 6，7 より合計人数 136 人中（1）では 127 人，（2）では 100 人の生徒が正答となっており，ほとんどの生徒は変量の抽出ができていた。（2）の誤答者 36 名のうち 30 名は無回答であった。この無回答者のうち（1）の正答者は 24 名おり日常的事象と比較して，図形的事象の変量抽出に課題があると考えられる。なお図 8 より（1）の正答及び誤答内の解答類型を見ると，正答者内では石の重さ（26.4%），石の数（12.7%）という順に解答率が高かった。また図 9 より（2）の正答及び誤答内の解答類型に関しても「面積（33.2%）」，「横の長さ（22.3%）」の順に解答率が高かった。

2.　**離散量と連続量の区別**（問題 2）

図 10 より（1）の正答率が 66.2%と他の問題に比べて最も高く，（2）の正答率が 30.1%と最も低かった。この結果より生徒は，同じ比例関係のグラフである場合でも連続量の方が，離散量より理解できていると考えられる。なお，各小問間の正答率をカイ 2 乗検定を用いて検定した結果，（1）と（3），（1）と（4），（2）と（4）で有意差が認められた（p<0.01）。図 10 では「（1）と（4）」の連続量に関する両正答率が 39.7%，「（2）と（3）」の離散量に関する両正答率が 17.6%となっており，比例及び反比例のどちらにしても連続量の方が離散量より理解度が高いことが分かる。また「（1）と（4）」群と「（2）と（3）」群での正答率をカイ 2 乗検定を用いて検定した結果，有意差が認められた（p<0.01）。このことからも離散量の理解と連続量の理解が相互に影響し合っている可能性が見られる。

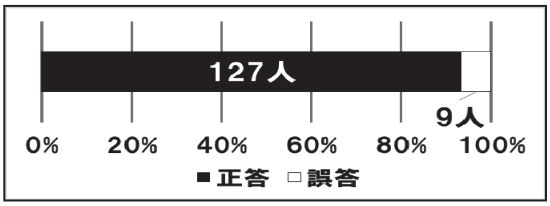


**図 6**　問題 1(1)の正答・誤答者数

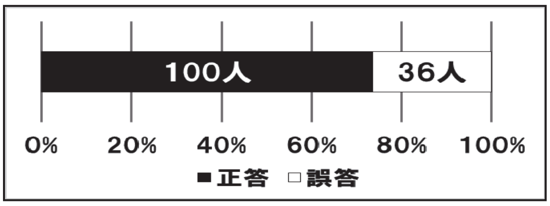


**図 7**　問題 1(2)の正答・誤答者数

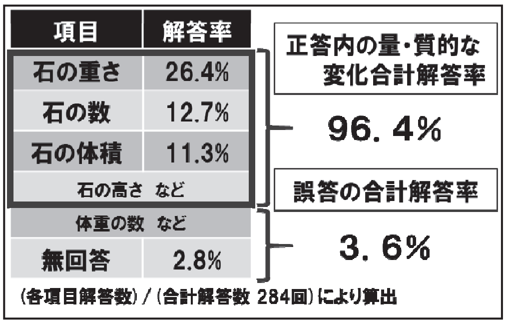


**図 8**　問題 1(1)の正答・誤答内の解答類型

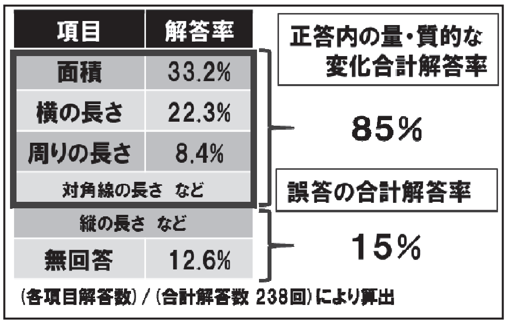


**図 9**　問題 1(2)の正答・誤答内の解答類型

3.　2 変量の抽出（問題 3）

図 11 では「❶ともなって変わる 2 つの数量」,「❷対応のようす」,「❸変化のようす」の正答率を，解答用紙の『①②それぞれ両方記述している場合（①と②の両方正答)』,『①か②のどちらか記述している場合（①か②の片方正答)』,『両方とも記述していない場合（①と②の両方誤答)』の 3 つに分類し提示している。また図 12 では「ともなって変わる 2 つの数量」「対応のようす」「変化のようす」の 3 観点全てを『①と②の両方に記述できている場合（①と②の両方正答)』,『①か②のどちらか片方に記述できている場合（①か②の片方正答)』,『両方とも記述できていない場合や上記の3観点のうちいずれか記述できていない場合（その他)』の 3 つに分類して提示している。

図 11 より❷(55.9%)と❸(55.9%)に比べ, ❶(46.3%)の正答率が低く，2 変量の抽出に課題があると考えられる。一般的に関数関係の見方としては，2 変量の抽出後に対応や変化のようすを捉えることになるが，上記の結果より 2 変量の抽出が出来ていなくとも，概ねの生徒たちが文章から 2 つの変量を見つけ出し，対応や変化のようすを捉えることが出来ていることが分かる。また図 12 では,『①と②の両方正答』『①か②の片方正答』を除く解答率が半数近く見られ，2 変量・対応・変化の 3 つの観点を関連させながら記述することに課題があると考えられる。ただ,『その他』の 59 人のうち，少なくとも 2 つの観点が正答となっていた生徒は 32 人おり，3 観点を相互に関連付けて表現するように指導法を改善することにより誤答率が減少する可能性がある。

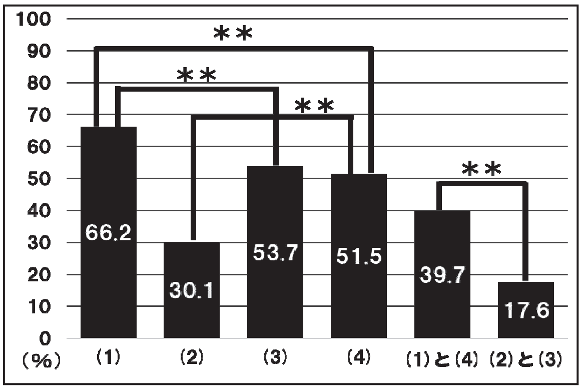


**図 10　問題 2 における小問別正答率**

(図中)＊＊：p<0.01

**表 2　問題 2「(1)と(4)」群と「(2)と(3)」群の正答率のクロス表(人)**

$\chi^2(1)=8.849$, $p<0.01$　Phi=0.255

| | | (2)と(3) 正答 | (2)と(3) 誤答 | 合計 |
|---|---|---|---|---|
| (1)と(4) | 正答 | 16 | 38 | 54 |
| | 誤答 | 8 | 74 | 82 |
| 合計 | | 24 | 112 | 136 |

4.　関数の判別（グラフ）と理由説明（問題 4）

小問（1）～（6）の全体を通して関数であるかを判別できている生徒は半数ほどにとどまっている（図 13)。特に関数の判別及び理由が正答となっている割合を見ると，小問の全体平均は 19.4%となっており，正確に理由を説明した上で，関数であるかを判別できている生徒は非常に少ないことが分かる。なお，小問全体の関数の理由説明の場面において，対応する $x$ と $y$ の値の組合せの記述に関する平均正答率は 22.8%, $x$ の値により $y$ の値がただ 1 つに決まるかどうかの判断に関する平均正答率は 45.7%であった。したがって，表に比べて，対応する数量の関係を正確に読み取ることが難しいグラフでは，生徒は具体的な $x$ と $y$ の値を抽出することが難しいと考えられる。

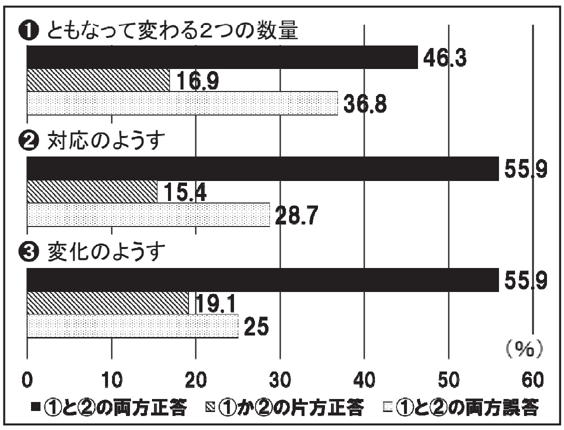


**図 11　問題 3 の観点別解答率**

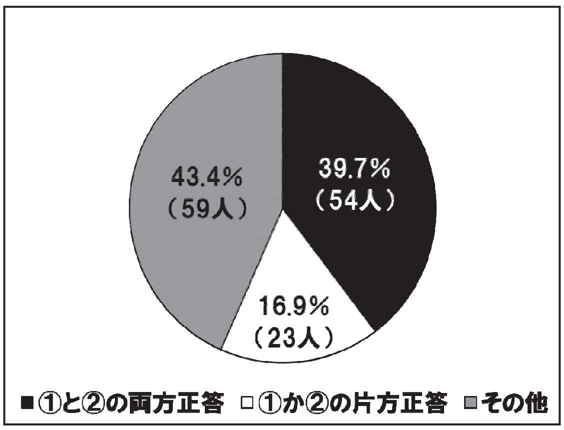


**図 12　問題 3 の観点別解答率**

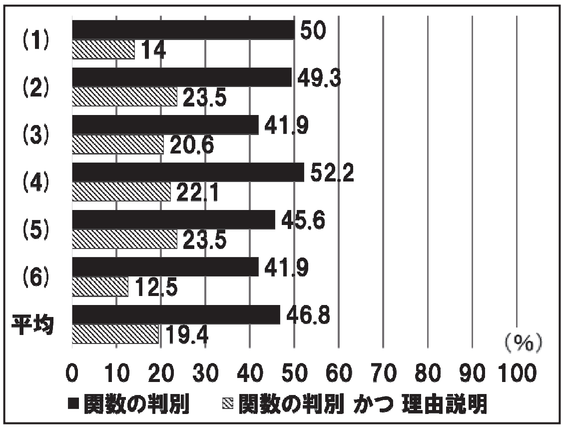


図13 問題4の正答率

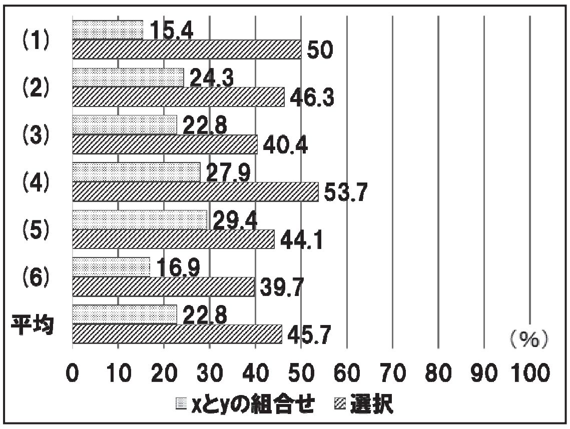


図 14 問題4の理由の正答率

5. **関数の判別（文章）と関係式表現**（問題 5）

正答率の高い小問は，（1），（3），（5），（6）であった（図15）。小問（1），（3）は体重や身長に関連する生徒にとって思考しやすい日常的事象，また小問（5），（6）は小学校の教科書内でよく見られる関数関係が示されていた。したがって，これらについては関数であるかどうかを判別することはできている。一方，小問（2），（4），（7），（8）は全体的に正答率が低く，（1），（3）を除く多意対応の判別に課題があると考えられる。特に小問（2）では「$y=x\times$高さ」と立式し，関数であると判断した生徒が多かった（図16 上図）。また，小問（4）に関しては式を記載する欄に「3＞2，5＞4，7＞6」のように成立する $x$ と $y$ の値の組だけを考え，関数であると判断している生徒が目立った（図16 下図）。このことより，1つの $x$ が決定された場合に，求められうる $y$ の値を書き出して本当にただ1つに決まるかどうかを吟味する思考過程が欠けていると考えられる。小問（7），(8)に関してはどちらも図形的事象を取り扱った問題であるが，この問題の正答者の解答欄では $x$ や $y$ の値が変化したときの情景図を描いていることが目立った（図17）。このように図形的事象の問題では $x$ や $y$ の値の変化に伴う図の変化を書き出すことは有効であると考えられる。また小問全体を通じて関数の判別かつ式表現の平均正答率が21.9％と低いことから，式で表現する能力または式で表現できるかどうか判別する能力とともに，関数であるかを判断することに課題があると考えられる。

6. **独立変数と従属変数の区別**（問題 6）

解答類型1と4の解答率より，荷物の大きさと料金の変量を抽出できている場合に独立変数と従属変数を混同している生徒は少ない（図18）。しかし，少なくとも①と②のどちらかに荷物の大きさと料金を記述していない解答率の合計が36％，無回答が22.1％であることを踏まえると，これらの変量を枠内に当てはめる前段階で文章内から適切に2変量を抽出できている生徒が少ないといえる。

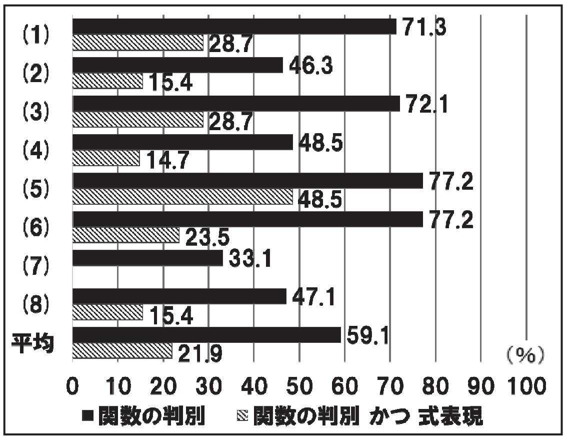


図 15 問題5の小問別正答率

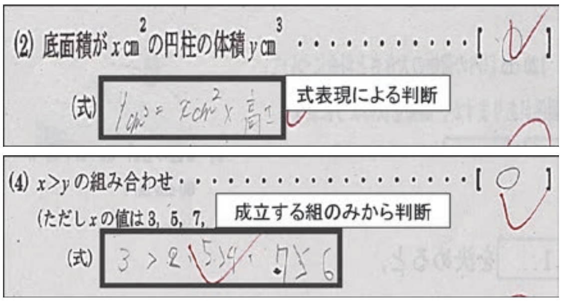


図 16 問題5小問(2),(4)の関数の判別 誤答例
上図：小問(2)，下図：小問(4)

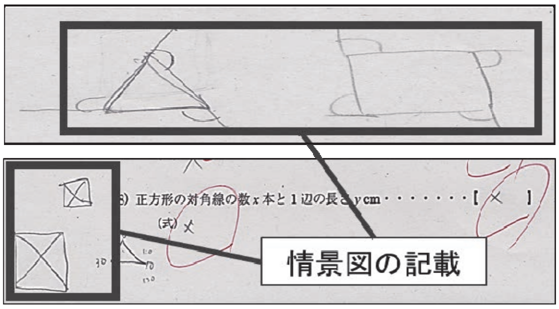


図 17　問題 5 小問(7),(8)の関数の判別 正答例
上図：小問(7)，下図：小問(8)

| | 解答類型 | 解答率（%） |
|---|---|---|
| 1 | ①荷物の大きさ ②料金 | 37.5 |
| 2 | ①荷物の大きさ ②異なる解答 | 4.4 |
| 3 | ①異なる解答 ②料金 | 2.2 |
| 4 | ①料金 ②荷物の大きさ | 4.4 |
| 5 | ①料金 ②異なる解答 | 5.1 |
| 6 | ①異なる解答 ②荷物の大きさ | 3.7 |
| 7 | 上記以外の解答 | 20.6 |
| 8 | 無回答 | 22.1 |

図 18　問題 6 の解答類型

## V．おわりに

本稿では中学生の関数の意味に関する理解度を明らかにする前段階で，現行の学習指導要領や教科書等を分析することで，関数の定義指導の特徴を明らかにした。これより次の 3 点が明らかとなった。①関数の定義内容は時代の流れに沿って変容し，現在では対応という用語に重点を置いて指導が成されている。②日本の関数教育は小学校から中学校にかけて系統的に行われ，既習の内容を踏まえて関数関係の意味が指導される。③教科書における関数の定義指導の場面では，ある事象から 2 変量を抽出して変化や対応に着目した定義が示され，その後，表やグラフ等を用いながらそれらのようすを確認する。また，この時の特徴として，生徒にとって思考しやすい日常的事象や図形的事象が取り扱われていること，表やグラフにより変化や対応のようすを理解しやすいようにしていること，具体的に変化では増加と減少を，対応では多意対応及び多対 1 を除く 1 対 1 の対応関係のみを取り扱っていることが明らかとなった。

これら 3 点の特徴を解明した上で，本稿では小学校段階から関数教育を受けてきた生徒が関数の意味に関してどの程度の理解度を示すかを認識調査により明らかにした。この認識調査の分析結果より次の 6 点の示唆が得られた。問題 1 では，図形的事象に多少の課題あるものの，両小問において正答者は多かった。これより①ある事象から変量に気付き，抽出することは可能である。次に問題 2 では，比例及び反比例のどちらの関数関係においても連続量の方が離散量より正答率が高かった。よって②離散量に比べると連続量の認識は高く，それに関連する事象のグラフを選択することは可能である。問題 3 では，変化や対応のようすの正答率が，ともなって変わる 2 つの数量の正答率よりも高かった。また 3 つの観点を一貫して正答できていない生徒が半数近くいた。ゆえに③変化や対応に関する気づきの前段階の根本的な 2 変量の抽出には課題があり，かつ 3 つの観点を相互に関連させる視点に課題がある。問題 4 では，関数の判別及び理由の小問全体の平均正答率が低かった。特に理由内の $x$ と $y$ の値の組合せに関する小問全体の平均正答率が低かった。よって④グラフの性質を読み取り，関数関係が成立する条件を論理的に説明することや，対応する 2 組の値を発見して表現することに課題がある。問題 5 では，日常的事象や小学校での既習の内容に関して関数の判別は可能であったものの，日常的事象及び 1 対 1 を除く対応関係の正答率は低かった。つまり⑤多意対応の問題内でも現実場面で想定しにくい事象では関数かどうかを判別することが困難である。問題 6 では荷物の大きさと料金以外の解答，無回答の割合が高かった。よって⑥文章や表，情景図などが複合した問題では，抽出した 2 変量で関数関係が成り立つか精査する能力や根本的に変量を抽出する能力に課題がある。

また新たな指導法を構築する前段階で，認識調査の問題ごとの分析結果から示唆される関数の定義指導の留意点を以下に 3 つ挙げておく。

①　離散量と連続量の接続

問題 2 では，「(1) と (4)」群（連続量）と「(2) と (3)」群（離散量）での正答率をカイ 2 乗検定した結果，有意差が認められた（$p<0.01$）。この結果より，離散量の理解と連続量の理解が相互に影響を及ぼし合っている傾向もみられた。このことからも離散量と連続量の接続を意識した教材の導入を検討する必要がある。

② グラフや表の活用による2変量の抽出，変化，対応の関連性

問題3より2変量の抽出，変化，対応の3つの観点の関連性への見方が希薄となっていることが明らかとなった。関連性を意識づけるためには文章表現だけでなく，様々な表現方法を活用する必要がある。表現方法にはそれぞれ特徴があり，表であれば対応する2つの数量の組の値を明確に捉えることができ，グラフであれば，2つの数量の変化の様子を視覚的に捉えることができる。ゆえにこれらを相互に扱うことにより，様々な事象において3つの観点による関連性を高めるようにする。

③ 変数がとりうる様々な値から想定される場面の想像

問題5の式表現の記述例より，生徒は関数関係が成立する一場面より断片的に関数の判別をしていることが明らかとなった。それぞれの事象において，より総合的に関数関係が成立するかを確認する思考が持てるように，少なくとも課題解決の際に助言する必要があると考えられる。特に図形的事象が扱われている問題に関しては $x$ と $y$ の値の変化に伴い図形がどのように変容するかを想像・表現させるように指導する必要がある。

今後の研究としては，上記の認識調査の分析結果及び指導上の留意点をふまえて，生徒の関数認識にそった指導法を開発することである。そして，開発した指導法で教育実践を実施することで，生徒の関数の意味に関する理解度の変化を解明し，指導の妥当性を検証したい。

## 注 記

注1) PISA2012では数学的リテラシーの習熟度を得点化し，7つのレベルに分類して各国のレベルごとの生徒の割合が分かるようにしている。7つの習熟度レベルは次の得点に対応し，1つのレベルはおよそ62点の幅から成る。『レベル6以上：669点以上，レベル5：607点以上669点未満，レベル4：545点以上607点未満，レベル3：482点以上545点未満，レベル2：420点以上482点未満，レベル1：358点以上421点未満，レベル1未満：358点未満』となっている。

注2) 小学校学習指導要領解説算数編では「D 数量関係」領域の概観を，関数の考え，式の表現と読み，資料の整理と読みに分類して記載している。ここでは「関数の考え」の内容を抜粋して記載している。なお，第1学年から第3学年の「関数の考え」で示しているのは「A数と計算」の領域の関連する内容である。また中学校第1学年から第3学年までの内容に関しては中学校学習指導要領解説数学編の中学校数学科の内容の構成を参考に作成している。

## 引用・参考文献一覧

1) 阿部浩一（1980）『教育大学教科教育講座第5巻 算数・数学科 教育の理論と展開』第一法規出版株式会社，東京，pp.165-200.

2) 岡部恒治他（2012）『中学校数学 1』数研出版株式会社，東京，pp.102-131.

3) 岡本和夫，小関熙純，森杉 馨，佐々木武他（2012）『未来へひろがる数学1』株式会社新興出版社啓林館，大阪，pp.96-125

4) 国宗進（1994）「小・中学校における変数の扱いに関する研究」『静岡大学教育学部研究報告教科教育学篇』25，pp.79-102.

5) 国立教育政策研究所（2013）『生きるための知識と技能5 OECD生徒の学習到達度調査（PISA）2012年調査国際結果報告書』株式会社明石書店，東京，pp.7-180.

6) 澤田利夫，坂井裕他（2012）『中学数学 1』教育出版株式会社，東京，pp.123-156

7) 重松敬一他（2012）『中学数学 1』日本文教出版株式会社，大阪，pp.110-147

8) 相馬一彦他（2012）『数学の世界 1年』大日本図書株式会社，東京，pp.125-162

9) 一松信，岡田褘雄，町田彰一郎他（2012）『中学校 数学1』学校図書株式会社，東京，pp.114-147

10) 藤井斉亮，俣野博他（2012）『新しい数学 1』東京書籍株式会社，東京，pp.106-137

11) 文部科学省（2008）『小学校学習指導要領解説算数編』株式会社東洋館出版社，東京.

12) 文部科学省（2008）『中学校学習指導要領解説数学編』教育出版株式会社，東京.

13) 柳本哲（2008）「解析」黒田恭史（編）『数学科教育法入門』第6章，共立出版株式会社，東京，pp.127-155.