数の表現と関数の表示

－10 進法、2 進法、3 進法などの利用－

占部　博信

The Expression of Numbers and the Representation of Functions

－The Decimal System, the Binary System, the Ternary System and their Utilization－

Hironobu URABE

2006 年 11 月 30 日受理

抄録：一般に、「分数」や「関数」については、数学教育上の難しさがいろいろと指摘されている。しかし、これらは、算数及び数学の理解にとってとても重要な概念である。
本稿では、「分数」と「関数」の係わり合いにも着目して、いわゆる、数の「比」や、１０進法、２進法、３進法による「数の表現」及びその「関数の表示」などへの応用例について、小学校教科内容論（算数）や総合演習及び数学科教育講究に関わる教材の開発という視点から、多面的に考察してみたいと思う。

キーワード：数の表現、分数、p-進法、関数の表示

はじめに

数年前に、「分数の計算ができない大学生」という本が話題をよんだが、この本の題名はこうすればよく売れるという思惑から（も）つけられたものらしい。

でも、考えてみれば、小学生にとってはもちろんのこと、中学生にとってもそうであろうが、「分数」についての計算や取り扱いがきちんとできるようになることはそれほど易しくはないだろうと思われる。

さて、まず、はっきりさせておきたいのは、「分数の定義」であるが、m, n が（簡単のために）自然数のとき、

$$(\square \times m =)\ m \times \square = n \qquad (\#)$$

をみたす□がただ一つ決まり、これを

$$\square = \frac{n}{m} \left(= \frac{1}{m} \times n = n \times \frac{1}{m} \right)$$

と表すというのが、分数 n/m の定義である。

((#)において、$n = 1$ のとき、$1/m$ が定まるのである。)

（また、$a, b > 0$ に対して、積の可換性：$a \times b = b \times a$ も長方形の面積に対応付けて考えればその成立がわかると言えようか。）

このとき、ちなみに、1/2 や 1/4 などは半分とかさらにその半分だからともかく、8/13 や 29/37 さらには 101/9057 でなくても、1/3 や 1/7 ですら、多くの小学生がきちんと把握できると言えるのだろうか？

というのも、（１０進法での）小数で表せば、

$$\frac{1}{2} = 0.5, \qquad \frac{1}{3} = 0.3333333 \quad \cdots$$

となり、後者は有限小数ではないのだからである。

なお、「分数表示」における数の「比」はいろいろな場面に顔を出すわけである。
例えば、円周率πの定義：

$$\pi = \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$$

に現れるが、さらには、三角関数 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 及び、$\tan\theta$ $\left(= \sin\theta/\cos\theta\right)$ の定義にも現れる。このように、「分数」を含めた「数の表現」は、「関数の表示」とも深く関わっているのである。
以下では、重要な意義を有する「数の表現」とその「関数の表示」への応用例について考察しようと思う。

1. 10 進法、2 進法、及び、3 進法

ここでは、まず、小学校教科内容論（算数）で利用したことを述べよう。
さて、１０進法による表示であるが、m, n を自然数とするとき、

$$A := c_0 \times 10^m + c_1 \times 10^{m-1} + \cdots + c_{m-1} \times 10 + c_m + a_1 \times \frac{1}{10} + a_2 \times \frac{1}{10^2} + \cdots + a_n \times \frac{1}{10^n} + \cdots$$

（ただし、c_j, a_k はすべて 0, 1, 2, ⋯, 9 のうちの一つであるとする。）
のように表される場合に、

$$A := \left(c_0 c_1 \cdots c_{m-1} c_m . a_1 a_2 \cdots a_n \cdots\right)_{10}$$

と表されるということである。（もちろん、小数部分は有限の場合もありうる。）
なお、１０進法のときには、上の表現は簡略に $A = c_0 c_1 \cdots c_{m-1} c_m . a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ と表されることが多い。

例えば、

$$365.107291 = 3 \times 10^2 + 6 \times 10 + 5 + \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{10^2} + 2 \times \frac{1}{10^3} + 9 \times \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5}$$

である。（係数の c_j, a_k が 0 や 1 の場合は省略されたりすることもありうる。）
さらに、分数との関連で言えば、

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{1}{4} = 0.25, \quad \text{及び} \quad \frac{1}{3} = 0.333333 \cdots \qquad (*)$$

などでもある。

さて、小学校での算数の授業でもしばしば話題として出されることに

$$B := \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

の値を求める計算がある。
筆者は、このことを少々考えてみた。そこで気付いたのは、B の計算の仕方はいろいろとあるということである。
まず、$2 \times B = 2 \times \left(1/2 + 1/3\right) = 1 + 2/3 = 5/3$ 。従って、$B = 5/3 \div 2 = 5/6$ と計算してもよい。また、$(*)$ を利用することも可能であろう。実際、

$$B = 0.5 + 0.3333333 \cdots = 0.8333333 \cdots = 0.8 + 0.03333333 \cdots$$

であり、$0.033333\cdots = (0.3333333\cdots) \div 10$ であるから、

$$B = \frac{8}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

が得られる。
（$B = 2/5$ というのが間違っていることは $2/5 < 1/2$ からすぐにわかる。）

なお、$p > 1$ のとき、等比級数の和として、

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^n} + \cdots = \frac{1}{p-1}$$

との関連で、高校生にとって、

$$0.999999\cdots = 1 \quad ? \qquad (**)$$

が問題となったりするが、この主張 $(**)$ と $(*)$ の主張は同等であるのは明らかだろう。（小学生にとって、分数 $1/3$ の理解は決して易しくないということがわかると思われる。）

それでは、「２進法」と「３進法」についての定義を述べよう。
まず、「２進法」について：

$$A := c_0 \times 2^m + c_1 \times 2^{m-1} + \cdots + c_{m-1} \times 2 + c_m + a_1 \times \frac{1}{2} + a_2 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + a_n \times \frac{1}{2^n} + \cdots$$

（ただし、c_j, a_k は 0 か 1 である。）と表されるときに、

$$A := (c_0 c_1 \cdots c_{m-1} c_m . a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_2$$

と表すということである。
例えば、

$$9 = 2^3 + 1 = (1001)_2, \quad \frac{3}{8} = \frac{2+1}{2^3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = (0.011)_2.$$

次に、「3 進法」について：

$$A := c_0 \times 3^m + c_1 \times 3^{m-1} + \cdots + c_{m-1} \times 3 + c_m + a_1 \times \frac{1}{3} + a_2 \times \frac{1}{3^2} + \cdots + a_n \times \frac{1}{3^n} + \cdots$$

（ただし、c_j, a_k は 0 か 1 か 2 である。）と表されるとき、

$$A := (c_0 c_1 \cdots c_{m-1} c_m . a_1 a_2 \cdots a_n \cdots)_3$$

と表すということである。例えば、

$$34 = 3^3 + 2 \times 3 + 1 = (1021)_3, \quad \frac{19}{27} = \frac{2 \times 3^2 + 1}{3^3} = 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} = (0.201)_3$$

である。

以下では、循環する部分の上に「バー」をつけて表すことにする。例えば、

$$(0.1000110111011011101101110110111011011101101110\cdots)_2 = (0.10001\overline{101110})_2$$

である。

例題１． $\frac{1}{5} = \left(0.\overline{0011}\right)_2$　であることを確かめよ。

（解）　次のように考えればわかる。

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2^3}\times\frac{5+3}{5} = \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\times\frac{5+1}{5} = \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\times\frac{1}{5}.$$

例題２． $\frac{1}{5} = \left(0.\overline{0121}\right)_3$　であることを確かめよ。

（解）　次のように考えればよい。少し、詳しく書いてみよう。

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{3^2}\times\frac{9}{5} = \frac{1}{3^2}\times\left(1+\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}\times\frac{12}{5} = \frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}\times\left(2+\frac{2}{5}\right)$$

であり、さらに、

$$= \frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{1}{3^4}\times\frac{6}{5} = \frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{1}{3^4}\times\left(1+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^4}\times\frac{1}{5}$$

であることからわかる。

演習問題１． 1/7　と　1/11　及び　1/13　について、その２進法による表示を求めよ。さらに、３進法による表示も求めよ。

（**答え**：　$1/7 = \left(0.\overline{001}\right)_2$，　$1/7 = \left(0.\overline{010212}\right)_3$，

$1/11 = \left(0.\overline{0001011101}\right)_2$，　$1/11 = \left(0.\overline{00211}\right)_3$，

$1/13 = \left(0.\overline{000100111011}\right)_2$，　$1/13 = \left(0.\overline{002}\right)_3$．）

2．冪根による表示

冪根（ベキ根）については、p を２以上の自然数とするとき、

$$x^p = y \quad\Leftrightarrow\quad x = y^{1/p} \quad (x, y > 0)$$

となっているが、x を y の p 乗根という。

慣例によって、$y^{1/2}$ は $\sqrt{y}$ とも表される。　（$f(x) := x^p$ が $x > 0$ で連続でかつ単調増加だから意味がある。）

まず、p が2 のときの２乗根について考えよう。$0 < b << a$　として、次の近似式が成り立つ。

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\left(\sqrt{a}\right)^3} \qquad (\bigstar)$$

この式は、$|t| << 1$のとき、$\sqrt{1+t}$ が $1+t/2$　で近似できることに注意して、

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a}\sqrt{1+b/a} = \sqrt{a}\left(1+b/2a+\delta\right)$$

と表して、δ を一項だけ取るとすれば、$\delta = -b^2/\left(8a^2\right)$　とすればよいことからわかる。(*cf*. [5])

$\sqrt{2}$ については、$\sqrt{a} = u,\quad b = 2-u^2 \ (a+b=2)$ として、上の式 $(\bigstar)$ の右辺を計算すれば、

$$u+\left(2-u^2\right)/\left(2u\right)-\left(4-4u^2+u^4\right)/\left(8u^3\right)=\frac{3u}{8}+\frac{3}{2u}-\frac{1}{2u^3}\quad(★')$$

となる。ここで、$(★')$の右辺を

$$F(u)\coloneqq\frac{3u}{8}+\frac{3}{2u}-\frac{1}{2u^3}$$

とおけば、$u=1.4$ 対して、$F(u)\doteqdot 1.4142$ となり、$u=1.4142$ とすれば、$F(u)\doteqdot 1.41421356$ が得られ、さらに $u=1.41421356$ とおけば、$F(u)\doteqdot 1.4142135623730950488$ が得られることが示される。
実は、$\sqrt{2}$ は $1.414213562373095048801688 72\cdots$ となっている。

また、$\sqrt{3}$ については $\sqrt{a}=v,\ b=3-v^2\ (a+b=3)$ として、$(★)$の右辺を計算すれば、
$v+\left(3-v^2\right)/(2v)-\left(9-6v^2+v^4\right)/\left(8v^3\right)$ を整理して、$F(u)$ の代わりに、

$$G(v)\coloneqq\frac{3v}{8}+\frac{9}{4v}-\frac{9}{8v^3}$$

が得られることになる。このとき、$v=1.7$ として計算すれば、$G(v)\doteqdot 1.732$ が得られる。そこで、$v=1.732$ とすれば、$G(v)\doteqdot 1.7320508$ が得られ、さらに、$v=1.7320508$ として計算すれば、$G(v)\doteqdot 1.7320508075688772 93$ が得られる。
実は、$\sqrt{3}$ は $1.7320508075688772935274 46\cdots$ となっている。

さて、次に、2 とか 3 の 3 乗根について考えてみよう。
今度は、$|t|<<1$ のときに有効な近似式 $(1+t)^{1/3}\approx 1+t/3$ を利用して、上記の$(★)$の場合と同様の考察を行うと、$0<b<<a$ のとき、次のような近似式

$$(a+b)^{1/3}\approx a^{1/3}+\frac{b}{3\left(a^{1/3}\right)^2}-\frac{b^2}{9\left(a^{1/3}\right)^5}\quad(★★)$$

が得られる。
さて、$2^{1/3}$ については、$a^{1/3}=u$, $b=2-u^3\ (a+b=2)$ として、上記の式$(★★)$の右辺を整理すれば、

$$S(u)\coloneqq\frac{5u}{9}+\frac{10}{9u^2}-\frac{4}{9u^5}$$

となる。
また、$3^{1/3}$ については、$a^{1/3}=v$, $b=3-v^3\ (a+b=3)$ として同様に$(★★)$の右辺を整理すれば、

$$T(v)\coloneqq\frac{5v}{9}+\frac{5}{3v^2}-\frac{1}{v^5}$$

となる。

これらの式を利用して実際に近似値を求めてみよう。
まず、$u=1.25$ とすれば、$S(u)\doteqdot 1.25992$ が得られ、さらに、$u=1.25992$ とすれば、$S(u)\doteqdot 1.25992121049894873$ が得られる。
実は、$2^{(1/3)}=1.2599212104989487316476721 0607\cdots$ である。

次に、$v=1.44$ とすれば、$T(v)\doteqdot 1.442249$ が得られ、さらに、$v=1.442249$ とすれば、$T(v)\doteqdot 1.44224957030740838232$ が得られる。
実は、$3^{(1/3)}=1.442249570307408382321638 31\cdots$ である。

演習問題２．上記のやり方を利用して、$\sqrt{5}$ や $\sqrt{7}$ の近似値を求めてみよ。

演習問題３．上記のやり方を利用して、$5^{1/3}$ や $7^{1/3}$ の近似値を求めてみよ。

3. 円周率πの近似値

まず、有名なマチンの公式：

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

に注目しよう。
この公式は、$\tan\theta$ の加法公式：

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

から導かれる公式

$$\tan^{-1} u + \tan^{-1} v = \tan^{-1}\left(\frac{u+v}{1-uv}\right) \qquad (\dagger)$$

と、ここで、$u = v$ としたときの公式を合わせて利用することにより示される。
実際、

$$2\tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{5}{12}, \quad 2\tan^{-1}\frac{5}{12} = \tan^{-1}\frac{120}{119}$$
$$\tan^{-1}\frac{120}{119} - \tan^{-1}\frac{1}{239} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

のようにしてみごとな感じでその成立がわかる。
　さらに、$y^2+1 = xz$ のとき、等式（†）からわかるように、

$$\tan^{-1}\frac{1}{y} = \tan^{-1}\frac{1}{y+x} + \tan^{-1}\frac{1}{y+z}$$

が成り立つことを利用すれば、$5^2+1 = 26 = 2\times 13$ なので、

$$\tan^{-1}\frac{1}{5} = \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{18}$$

であることと、$7^2+1 = 50 = 5\times 10$ なので、

$$\tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{1}{12} + \tan^{-1}\frac{1}{17}$$

であることに留意しよう。
このとき、マチンの公式から、次の公式

$$\pi = 16\left(\tan^{-1}\frac{1}{12} + \tan^{-1}\frac{1}{17} + \tan^{-1}\frac{1}{18}\right) - 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

の成立がわかる。

ここで、さらに、$\left|x\right| << 1$ のとき、

$$\tan^{-1} x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

の成立を利用すれば、円周率πの近似値を求めることができる。
MAPLE で Digits $:= 50$ で $n = 15$ とすれば、小数点以下１５桁、また、$n = 31$ とすれば、小数点以下３０桁まで求めることができることがわかる。
実際、$\pi = 3.14159265358979323803948462643383279\,50\cdots$ である。

演習問題 4. 上の主張を確かめてみよ。

4. 円周率の無理数性

まず、連分数による表示式

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}}$$

の成立に注意しよう。
（この式の成立を最初にきちんと証明したのは、ルジャンドルだそうである。ハイラー・ワナーの本には、その証明が、演習問題として、的確なヒント付きで載っている。）

この式の成立がわかれば、円周率πの無理数性が示されるのである。

本稿では、証明は省略するが、上の事実を利用すれば、

$$x:\ \text{有理数} \quad \Rightarrow \quad \tan x:\ \text{無理数}$$

が成立するのがわかるので、

$$y:\ \text{有理数} \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1} y:\ \text{無理数}$$

の成立がわかることになる。
従って、$y = 1$ として、$\pi = 4 \times \tan^{-1} 1$ が無理数であることが示される。
（積分を利用する証明もあるが、ともかく、円周率πが無理数であることの証明は、決して易しくはないのである。）

ハイラー・ワナーの本は、興味ある歴史的な事実もわかるので、とても有益な本であるといえる。

5. ペアノによる平面充填曲線の表示

ペアノは、閉区間 $I = [0,1]$ から正方形 $Q = [0,1] \times [0,1]$ の全体への全射で連続な写像

$$F(t) = (\varphi(t), \psi(t)) \quad (t \in I)$$

すなわち、平面充填曲線と呼ばれるような「怪物曲線」の存在を、「３進法表示」を利用して、次のように明示した（１９０３）。($cf.$ [3])

$t = (0.t_1t_2t_3t_4t_5\cdots)_3 \in I$ とするとき、演算子 k を

$$k\,t_j := 2 - t_j \quad (t_j = 0,\ 1,\ 2)$$

（そして $k^{[v]}$ は k を v 回作用させるものとする）で定義して、

$$\varphi(t) := \left(0.t_1\left(k^{[t_2]}t_3\right)\left(k^{[t_2+t_4]}t_5\right)\cdots\right)_3,$$
$$\psi(t) := \left(0.\left(k^{[t_1]}t_2\right)\left(k^{[t_1+t_3]}t_4\right)\cdots\right)_3$$

と定義することによって定める。

ペアノによって示されたこの事実は、その当時にはとても衝撃的であったようだが、ワイエルシュトラスやカントールによる成果とともに現代数学の発展にとって、まさに重要な意義をもつものだったわけである。

ここでは、上記の写像が、正方形の周及び内部をすべて埋め尽くすことだけを確かめておくことにしたいと思う。

これは、以下のように、作用素 k の性質から確かめるのは容易である。実際、$k^{[2]}$ が恒等写像であること $\left(k^{[2]}t_j = k(2-t_j) = \{2-(2-t_j)\} = t_j\right)$ に注意すれば、

$$\forall\, \mathrm{p} = (\beta, \gamma) \in Q\left(= [0,\ 1]\times[0,\ 1]\right),$$

$\beta = (0.\beta_1\beta_2\cdots)_3,\quad \gamma = (0.\gamma_1\gamma_2\cdots)_3$ に対して、$t = (0.t_1t_2t_3\cdots)_3 \in I\left(=[0,\ 1]\right)_3$ として、

$$t_{2n-1} = k^{[t_0+t_2+\cdots+t_{2n-2}]}\beta_n,\qquad t_{2n} = k^{[t_1+t_3+\cdots+t_{2n-1}]}\gamma_n$$

と定めれば、k の性質により、

$$\beta_n = k^{[t_0+t_2+\cdots+t_{2n-2}]}\,t_{2n-1},\qquad \gamma_n = k^{[t_1+t_3+\cdots+t_{2n-1}]}t_{2n}$$

となっているので、

$$F(t) = \mathrm{p}$$

が成り立っていることがわかる。

あとがき

「子供や若者たちが学びから逃避している」という指摘がある。そのように見えるのも確かかもしれないが、しかしながら、子供たちは、学びからの逃避を望んでいるのではなく、実は、おもしろく、あるいは、わかったと感じられるように教えてほしいと思っているのではないかと（も）考えられる。

とにかく、易しくはないけれども、数学教育においても、教師はこれにちゃんと答えられるよう努力すべきだろう。そうありたいと思う。

参考文献

［１］　占部博信；　数と計算にかかわる実験数学、
　　　　　――　素因数や約数の形を探ろう　――
　　　　　　　京都教育大学教育実践研究紀要　第６号　（２００６）２１－２４

［２］　木幡　寛；　算数のできる子どもを育てる、
　　　　　　　講談社新書　１５２２　（２０００）

［３］　サガン　（鎌田訳）；　空間充填曲線とフラクタル、
　　　　　　　シュプリンガー・フェアラーク東京　（１９９８）

［４］　示野信一；　MAPLE　V　で見る数学ワールド
　　　　シュプリンガー・フェアラーク東京　（１９９９）

［５］　ハイラー・ワナー　（蟹江訳）；　解析教程　上　下
　　　　シュプリンガー・フェアラーク東京　（１９９７）

［６］　渡邉伸樹；　小学校における代数の体系化　その１
　　　　　――　分数の乗除計算について　――
　　　　　　　数学教育学会誌　臨時増刊　（２００６）　１１－２０